Soluție

1. a) Prin calcul direct, rezultă $A^2 - B^2 = 0_2$.

b) Se arată că $I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 = I_2 + 2 \cdot \left(A + A^2\right) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Atunci, $\det\left(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4\right) = 5$.

c) Pentru $n \in \mathbb{Z}$ oarecare, fie $X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se arată că $X_n^2 = I_2$.

2. a) Restul căutat este polinomul $r = 2X + 3$.

b) Avem $f = \left(X - x_1\right) \cdot \left(X - x_2\right) \cdot \left(X - x_3\right) \cdot \left(X - x_4\right)$, deci $\left(1 - x_1\right) \cdot \left(1 - x_2\right) \cdot \left(1 - x_3\right) \cdot \left(1 - x_4\right) = f(1) = 5$.

c) $g\left(x_1\right) \cdot g\left(x_2\right) \cdot g\left(x_3\right) \cdot g\left(x_4\right) = \left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right)\left(1 - x_3\right)\left(1 - x_4\right)\left(-1 - x_1\right)\left(-1 - x_2\right)\left(-1 - x_3\right)\left(-1 - x_4\right)$,
deci $g\left(x_1\right) \cdot g\left(x_2\right) \cdot g\left(x_3\right) \cdot g\left(x_4\right) = f(1) \cdot f(-1) = 5$.